Concursul Interjudeţean de Matematică "Cristian S. Calude"
Proba pe echipe, clasele IX-XII
27 octombrie 2013

Soluţii

RUNDA I

Problema 1. Se consideră numerele raţionale strict pozitive $r_1, r_2, r_3, ..., r_{2013}$ cu $r_1 + r_2 + r_3 + ... + r_{2013} = 1$ şi funcţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, f(n) = \sum_{k=1}^{2013} \{r_k \cdot n\}$. Să se determine valoarea maximă a funcţiei f. ($\{a\}$ este partea fracţionară a numărului real a).

Soluţie: Observăm că funcţia are valori întregi:

$$f(n) = \sum_{k=1}^{2013} \{r_k \cdot n\} = \sum_{k=1}^{2013} (r_k \cdot n - [r_k \cdot n]) = n - \sum_{k=1}^{2013} [r_k \cdot n].$$

Cum $f(n) < 1 \cdot 2013 \Rightarrow f(n) \le 2012$.

Fie $r_i = \frac{a_i}{b_i}, i = \overline{1, 2013}, (a_i, b_i) = 1, a_i, b_i \in \mathbb{N}^*$,

atunci

$$f(b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_{2013} - 1) = \sum_{i=1}^{2013} \left\{ b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_{2013} \cdot \frac{a_i}{b_i} - \frac{a_i}{b_i} \right\} = \sum_{i=1}^{2013} \left\{ -\frac{a_i}{b_i} \right\} = \sum_{i=1}^{2013} (1 - r_i) = 2013 - 1 = 2012.$$

Răspuns: 2012

Problema 2. Fie $x, y, z > 0$. Să se determine minimul expresiei $\frac{16 \cdot x}{y+z} + \frac{9 \cdot y}{x+z} + \frac{36 \cdot z}{x+y}$.

Soluţie:

$$\frac{16 \cdot x}{y+z} + \frac{9 \cdot y}{x+z} + \frac{36 \cdot z}{x+y} = \frac{16 \cdot (x+y+z)}{y+z} + \frac{9 \cdot (x+y+z)}{x+z} + \frac{36 \cdot (x+y+z)}{x+y} - 16 - 9 - 36 =$$

$$(x+y+z) \cdot \left(\frac{16}{y+z} + \frac{9}{x+z} + \frac{36}{x+y} \right) - 61 =$$

$$\frac{1}{2} \cdot (y+z+x+z+x+y) \cdot \left(\frac{16}{y+z} + \frac{9}{x+z} + \frac{36}{x+y} \right) - 61 \ge \frac{1}{2} \cdot (4+3+6)^2 - 61 = \frac{47}{2}.$$

Valoarea minimă se obţine pentru $\frac{y+z}{4} = \frac{x+z}{3} = \frac{y+z}{6}$ şi este $\frac{47}{2}$.

Răspuns: $\frac{47}{2}$.

Problema 3. Să se rezolve în $\mathbb{R}_+^*$ ecuaţia $(\text{arctg}\, x)^2 + \left(\text{arctg}\, \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{13 \cdot \pi^2}{72}$.

Soluţie: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)=\frac{1}{x}\Rightarrow \operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}.$

Notând $\operatorname{arctg}x=u,\ \operatorname{arctg}\frac{1}{x}=v$,obţinem:

$$\begin{cases} u+v=\frac{\pi}{2} \\ u^2+v^2=\frac{13\cdot\pi^2}{72} \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=\frac{\pi}{2} \\ u\cdot v=\frac{5\cdot\pi^2}{144} \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} u=\frac{\pi}{12} \\ v=\frac{5\cdot\pi}{12} \end{cases} sau \begin{cases} u=\frac{5\cdot\pi}{12} \\ v=\frac{\pi}{12} \end{cases}$$

Aşadar $\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{12}$ sau $\operatorname{arctg}x=\frac{5\cdot\pi}{12}$

$\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{12}\Rightarrow x=tg\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3};$

$\operatorname{arctg}x=\frac{5\cdot\pi}{12}\Rightarrow x=tg\frac{5\cdot\pi}{12}=2+\sqrt{3}.$

Răspuns: S=$\left\{2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right\}$

Problema 4. Fie $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale definit prin $a_1=2$ şi $n\cdot a_{n+1}=\left(2\cdot n+2\right)\cdot\left(a_n+n\cdot 2^n\right), n\geq 1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n}$.

Soluţie: Relaţia din enunţ se mai scrie:

$$n\cdot a_{n+1}=\left(2\cdot n+2\right)\cdot a_n+n\cdot\left(n+1\right)\cdot 2^{n+1}\Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{\left(n+1\right)\cdot 2^{n+1}}-\frac{a_n}{n\cdot 2^n}=1\Rightarrow \frac{a_n}{n\cdot 2^n}=n\Rightarrow a_n=n^2\cdot 2^n, n\geq 1$$

.

Atunci $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n=\left(n!\right)^2\cdot 2^{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(n!\right)^{\frac{2}{n^2}}\cdot 2^{\frac{n+1}{2\cdot n}}\right]=\sqrt{2};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n!\right)^{\frac{2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{2\cdot\ln(n!)}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{2\cdot\left[\ln\left((n+1)!\right)-\ln(n!)\right]}{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{2\cdot\ln(n+1)}{2n+1}}=1.$$

Răspuns: $\sqrt{2}$